04/04/2019

Master Theorem

Θα πέσει κάτι τέτοιο. Πρέπει να ξέρεις τους τύπους

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, $a \geq 1$, $b > 1$

(Π.χ $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ $a=3$, $b=2$, $f(n)=n$)

Έχουμε 3 περιπτώσεις

i) Αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ τότε, $\varepsilon > 0$ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

ii) Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$ τότε, $k \geq 0$ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

iii) Αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ τότε $\varepsilon > 0$, $T(n) = \Theta(f(n))$

Λύσεις

- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

  $a=3$, $b=2$, $f(n)=n^2$

  $n^2 = n^{\log_2 3 + \overset{\approx \varepsilon}{1}}$ άρα, iii) $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta(n^2)$

- $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

  $a=4$ $b=2$ και $f(n)=n^2$

  $n^2 = n^{\log_2 4}$, άρα, $T(n) = \Theta(n^{\log_2 4} \cdot \log n)$, έχουμε $k=0$.

Υπάρχει περίπτωση να μην ανήκει και σε καμία από τις 3 περιπτώσεις.

$2^n = n^{\log_2 1 + \xi}$

- $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 2^n$

$a = 1$, $b = 2$ $f(n) = 2^n$

$2^n = n^{\log_2 (1+\xi)}$ Είμαστε στην 3^{η} περίπτωση

Άλλος τρόπος: να βρω ένα κάτω φράγμα: $2^n > n$

$T(n) = \Theta(2^n)$

- $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n$

$a = 16$ $b = 4$ $f(n) = n$

$n = n^{\log_4 16 - \varepsilon}$ $\varepsilon = 1$ $T(n) = \Theta(n^{\log_4 16})$

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n$

$a = 2$, $b = 2$ $f(n) = n\log n$

$n\log n = n^{\log_2 2} \cdot \log^{k=1} n$ άρα, $T(n) = \Theta(n^{\log_2 2} \log^2 n)$

Άσκηση: i) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$ iv) $T(n) = 64T(\frac{n}{8}) - n^2 \log n$

ii) $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n!$ v) $T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + n^2$

iii) $T(n) = 6T(\frac{n}{3}) + n^2 \log n$ vi) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \log n$

A[mid]

1	5	8	12	17	20	23

low value high high

```
int BinarySearch (Type A[0, ..., N-1], value, low, high){
   if (high < low)
        return -1;
   mid = low + (high - low)/2;
   if (A[mid] > value
        return BinarySearch(A, value, low, mid-1);
   else if (A[mid] < value)
        return BinarySearch (A, value, mid+1, high);
   else
        return mid;
```

Άσκηση: 1) Παρουσιάστε σύντομη περιγραφή του τρόπου λειτουργίας του αλγορίθμου.

2) Ιχνηλάτηση του BinarySearch (A, 14, 0, 9) όπου ο πίνακας A είναι ο A = [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]

3) Παρουσιάστε αναδρομική σχέση που να περιγράφει τη χρονική πολυπλοκότητα $T(n)$ του αλγορίθμου.

4) Τι τάξη είναι η πολυπλοκότητα του BinarySearch; Αποδείξτε τον ισχυρισμό.